Matrices anticommutantes

Trois niveaux de difficulté/longueur :

- Piste bleue : questions **1)** à **6)b)**. Le cas échéant, lisez quand même la suite, sans quoi les questions ne mènent à rien.
- Piste rouge : parties **1** et **2**.
- Piste noire : tout le devoir.

On dit que deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *anticommutent* si $AB = -BA$ et qu'une partie $\mathcal{A}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est *anticommutante* si $AB = -BA$ pour tous $A, B \in \mathcal{A}$ distincts.

1 Exemples de parties anticommutantes

1) a) Vérifier que les matrices $\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, a décrivant $\mathbb{C}$, forment une partie anticommutante de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

b) Soit $\{A_1, \ldots, A_r\}$ une partie anticommutante de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que $A_i^2 \neq 0$ pour tout $i \in [\![1, r]\!]$. Montrer que les matrices $A_1, \ldots, A_r$ sont linéairement indépendantes. En particulier, $r \leqslant n^2$.

D'après **a)**, il existe des parties anticommutantes infinies de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ — et même de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ — mais d'après **b)**, les matrices d'une telle partie anticommutante sont nilpotentes d'indice 1 ou 2, sauf éventuellement un nombre fini d'entre elles.

2) a) Soient $\{A_1, \ldots, A_r\}$ une partie anticommutante de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\{PA_1P^{-1}, \ldots, PA_rP^{-1}\}$ est une partie anticommutante de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

b) Soient $\{A_1, \ldots, A_r\}$ une partie anticommutante de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ et $\{B_1, \ldots, B_r\}$ une partie anticommutante de $\mathcal{M}_q(\mathbb{C})$. Montrer que les matrices $\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & B_1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} A_r & 0 \\ 0 & B_r \end{pmatrix}$ forment une partie anticommutante de $\mathcal{M}_{p+q}(\mathbb{C})$.

2 Parties anticommutantes irréductibles

On dit qu'une partie anticommutante $\{A_1, \ldots, A_r\}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est *réductible* s'il existe une matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, des entiers $p, q \in [\![1, n-1]\!]$ pour lesquels $p + q = n$ et des matrices $B_1, \ldots, B_r \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ et $C_1, \ldots, C_r \in \mathcal{M}_q(\mathbb{C})$ pour lesquels pour tout $i \in [\![1, r]\!]$: $PA_iP^{-1} = \begin{pmatrix} B_i & 0 \\ 0 & C_i \end{pmatrix}$. Dans le cas contraire, on dit que $\{A_1, \ldots, A_r\}$ est *irréductible*.

3) a) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Il est bien connu que M possède un polynôme annulateur non nul. Montrer qu'elle en possède un dont les racines sont toutes valeurs propres de M.

b) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que M est nilpotente si et seulement si $\mathrm{sp}(M) = \{0\}$.

4) Soient $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$, $B \in \mathcal{M}_q(\mathbb{C})$ et $Z \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$. On suppose que $AZ = ZB$ et que A et B n'ont pas de valeur propre en commun. Montrer que $P(A)\,Z = Z\,P(B)$ pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, puis en déduire que $Z = 0$.

5) Soient $A_1, B_1 \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$, $A_2, B_2 \in \mathcal{M}_q(\mathbb{C})$ et $B_3 \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{C})$ et $B_4 \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$. On pose $A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} B_1 & B_4 \\ B_3 & B_2 \end{pmatrix}$. On suppose que A et B anticommutent et que $0 \notin \mathrm{sp}(A_1) + \mathrm{sp}(A_2)$. Montrer que $B_3 = B_4 = 0$.

6) a) Montrer par récurrence sur n que toute matrice nilpotente de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est semblable à une matrice triangulaire supérieure de diagonale nulle.

b) En déduire que pour tout $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie non nulle et tout $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent, la matrice de u est triangulaire supérieure de diagonale nulle dans une certaine base de E.

c) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de valeurs propres distinctes $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$. Montrer que M est semblable à une matrice diagonale par blocs $\mathrm{diag}(M_1, \ldots, M_r)$ où pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, M_i est triangulaire supérieure à coefficients diagonaux tous égaux à λ_i.

7) a) Soit $\{A_1,\ldots,A_r\}$ une partie anticommutante de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que A_1 possède deux valeurs propres non opposées λ et μ. D'après **6)b)**, A_1 est donc semblable à une matrice $\begin{pmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{pmatrix}$ avec :

$$\begin{cases} M_1 \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C}) \\ M_2 \in \mathcal{M}_q(\mathbb{C}), \end{cases} \qquad \begin{cases} p,q \in [\![1,n-1]\!] \\ p+q=n, \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} \mathrm{sp}(M_1) \subset \{\lambda,-\lambda\} \\ \mu \in \mathrm{sp}(M_2) \subset \mathbb{C} \setminus \{\lambda,-\lambda\}. \end{cases}$$

Montrer que $\{A_1,\ldots,A_r\}$ est réductible.

b) Soit $\{A_1,\ldots,A_r\}$ une partie anticommutante irréductible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que A_i est nilpotente ou inversible pour tout $i \in [\![1,r]\!]$.

3 Taille maximale de certaines parties anticommutantes

On améliore dans cette partie les résultats de la partie **1**.

8) a) Soient $\mathbb{K}$ un corps, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $F_1,\ldots,F_r$ des sous-espaces vectoriels de E distincts de E. On suppose que $F_1 \cup \ldots \cup F_r = E$. Montrer que $|\mathbb{K}| \leqslant r-1$. On pourra se donner, à condition d'en discuter l'existence, deux vecteurs $u \in E \setminus F_1$ et $v \in F_1 \setminus (F_2 \cup \ldots \cup F_r)$ et s'intéresser à la droite affine $u+\mathrm{Vect}(v)$.

b) Soient $M_1,\ldots,M_r \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ non nulles. Montrer l'existence d'un vecteur $v \in \mathbb{C}^n$ pour lequel $M_i v \neq 0$ pour tout $i \in [\![1,r]\!]$, puis d'un vecteur $u \in \mathbb{C}^n$ pour lequel $u^\top M_i v \neq 0$ pour tout $i \in [\![1,r]\!]$.

9) Soit $\{A_1,\ldots,A_r\}$ une partie anticommutante de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que $A_i^2 \neq 0$ pour tout $i \in [\![1,r]\!]$. D'après **9)b)**, il existe deux vecteurs $u,v \in \mathbb{C}^n$ pour lesquels $u^\top A_i^2 v \neq 0$ pour tout $i \in [\![1,r]\!]$. On pose $M = \left(u^\top A_i A_j v\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant r}$.

a) Montrer que $\mathrm{rg}(M) \leqslant n$.

b) Montrer que $r \leqslant 2\,\mathrm{rg}(M)$ en étudiant la matrice $M+M^\top$.

On prouve ainsi que $r \leqslant 2n$. Cette inégalité est presque optimale. Pour tout $n \geqslant 5$, on sait en effet construire des parties anticommutantes $\{A_1,\ldots,A_{2n-3}\}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ pour lesquelles $A_i^2 \neq 0$ pour tout $i \in [\![1,2n-3]\!]$.

À présent, pour toute partie anticommutante $\{A_1,\ldots,A_r\}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et pour toute partie $I = \{i_1,\ldots,i_s\} \in \mathscr{P}\big([\![1,r]\!]\big)$ avec $i_1 < \ldots < i_s$, on pose $A_I = A_{i_1} \ldots A_{i_s}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note en outre enfin $\mathscr{P}_0(k)$ (resp. $\mathscr{P}_1(k)$) l'ensemble des parties de cardinal pair (resp. impair) de $[\![1,k]\!]$.

10) On souhaite montrer par récurrence sur $r \in \mathbb{N}^*$ que les familles $(A_I)_{I \in \mathscr{P}_0(r)}$ et $(A_I)_{I \in \mathscr{P}_1(r)}$ sont libres pour toute partie anticommutante $\{A_1,\ldots,A_r\}$ de matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

a) Initialisation : Montrer le résultat pour $r=1$.

Hérédité : Soit $r \in \mathbb{N}^*$. On suppose que les familles $(B_I)_{I \in \mathscr{P}_0(r)}$ et $(B_I)_{I \in \mathscr{P}_1(r)}$ sont libres pour toute partie anticommutante $\{B_1,\ldots,B_r\}$ de matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Soit $\{A_1,\ldots,A_{r+1}\}$ une partie anticommutante de matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Ensuite, soit $(\lambda_I)_{I \in \mathscr{P}_0(r+1)}$ une famille de nombres complexes pour laquelle $\displaystyle\sum_{I \in \mathscr{P}_0(r+1)} \lambda_I A_I = 0$.
On pose $S_0 = \displaystyle\sum_{I \in \mathscr{P}_0(r)} \lambda_I A_I$ et $S_1 = \displaystyle\sum_{I \in \mathscr{P}_1(r)} \lambda_{I \sqcup \{r+1\}} A_I$.

b) Comparer $A_{r+1}A_I$ et $A_I A_{r+1}$ pour tout $I \in \mathscr{P}\big([\![1,r]\!]\big)$, puis en déduire que $S_0 = S_1 = 0$, puis conclure.

On montre de même que la famille $(A_I)_{I \in \mathscr{P}_1(r+1)}$ est libre. Fin de la récurrence.

c) En déduire que pour toute partie anticommutante $\{A_1,\ldots,A_r\}$ de matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$:

$$r \leqslant 2\,\frac{\ln n}{\ln 2} + 1.$$

On vérifie aisément que pour toute partie anticommutante $\{A_1,\ldots,A_r\}$ de matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, les matrices $\begin{pmatrix} 0 & A_1 \\ A_1 & 0 \end{pmatrix},\ldots,\begin{pmatrix} 0 & A_r \\ A_r & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -I_n \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$ forment une partie anticommutante de matrices inversibles de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$.

11) Dans cette question, $n = 2^k m$ avec $k \in \mathbb{N}$ et m impair. Sans trop rédiger, justifier l'existence d'une partie anticommutante de matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de cardinal $2k+1$. L'inégalité de la question **10)c)** est optimale dans cette situation.